

## Exemple de test statistique (test de la vraisemblance)

On jette une pièce 10 fois : on observe 8 piles 2 faces ! (PREUVES)

Question : la pièce est-elle truquée ? (QUESTION ADRESSEE)

POSER LES HYPOTHESES :

$H_0 \Rightarrow$  HYPOTHESE NULLE

L'accusé (la pièce) est INNOCENT (hypothèse NULLE) :  $P(\text{pile}) = 0.5$

On peu faire des calculs de probabilités avec  $H_0$  !!!

$H_1 \Rightarrow$  HYPOTHESE DE TRAVAIL

L'accusé est COUPABLE :  $P(\text{pile}) > 0.5$  [PAS CONNUE !]

On ne peut pas faire de calcul de probabilité précis !!!

JUGE : calculer SACHANT  $H_0$ , la probabilité d'observer les preuves.

$$P(8 \text{ piles 2 faces} \mid H_0) = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^8}_{\text{piles}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\text{faces}} \cdot \underbrace{C_{10}^8}_{\substack{\# \text{ perm.} \\ \text{de 8 parmi 10}}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2^{10}}}_{\substack{}} \cdot \frac{10!}{8! \cdot (10-8)!} = \frac{10 \cdot 9}{1024 \cdot 2} \approx 0,044 = 4,4\%$$

DEGRE DE CONFIANCE :  $\alpha$

$$P(\text{obs} | H_0) < \alpha \Rightarrow \text{Rejet de } H_0 \Rightarrow \text{CONDAMNATION}$$

(considérons que  $P(\text{vrai}) > \frac{1}{2}$ )

$$P(\text{obs} | H_0) > \alpha \Rightarrow \text{Accepte } H_0 \Rightarrow \text{Acquitte !}$$

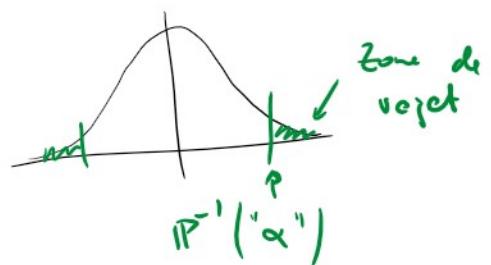
	Innocent ( $H_0$ )	Conseillé ( $H_1$ vrai)	$\alpha$ Réalité
$P < \alpha$	Contamination (Rejet de $H_0$ )	Erreur de type II	Puissance
$P > \alpha$	Acquittement (Accepte $H_0$ )	Vraisemblance	Erreur de type I

$$P(\text{24f} | H_0) \approx 4,4\%$$

$\alpha = 1\%$       Accepte  $H_0$  (Acquitte)       $\alpha = 5\%$       Rejet de  $H_0$  (Condamnation)

En général

$$\alpha = 1\% \\ 0,5\% \\ 0,1\% \\ 0,05\% \\ 0,01\%$$



Sur 30 lancers j'ai 24 piles

$$P(\text{24f}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{24} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \frac{30!}{24!}$$

$$\begin{aligned}
 P(\text{24r Cf}) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{24} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \frac{30!}{24! \cdot (30-24)!} \\
 &= \frac{1}{2^{30}} \cdot \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}{29 \cdot 28 \cdot \dots} \approx 6,4 \cdot 10^{-25}
 \end{aligned}$$

Il est rejeté dans le cas où  $\alpha = 0,01\%$

