

Exemple de test statistique (test de la vraisemblance)

On jette une pièce 10 fois : on observe 8 piles 2 faces ! (PREUVES)

Question : la pièce est-elle truquée ? (QUESTION ADRESSEE)

POSER LES HYPOTHESES :

$H_0 \Rightarrow$ HYPOTHESE NULLE

L'accusé (la pièce) est INNOCENT (hypothèse NULLE) : $P(\text{pile}) = 0.5$

On peut faire des calculs de probabilités avec H_0 !!!

$H_1 \Rightarrow$ HYPOTHESE DE TRAVAIL

L'accusé est COUPABLE : $P(\text{pile}) > 0.5$ [PAS CONNUE !]

On ne peut pas faire de calcul de probabilité précis !!!

JUGE : calculer SACHANT H_0 , la probabilité d'observer les preuves.

$$\begin{aligned} P(8 \text{ piles } 2 \text{ faces} \mid H_0) &= \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^8}_{\text{piles}} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\text{faces}} \underbrace{C_8^{10}}_{\substack{\# \text{ perm.} \\ \text{de 8 parmi 10}}} \\ &= \frac{1}{2^{10}} \cdot \frac{10!}{8! \cdot (10-8)!} = \frac{10 \cdot 9}{1024 \cdot 2} \approx 0,044 = \underline{\underline{4,4\%}} \end{aligned}$$

DEGRE DE CONFIANCE : α

$P(\text{obs} | H_0) < \alpha \Rightarrow \text{Rejeter } H_0 \Rightarrow \text{CONDAMNATION}$
 (considère que $P(\text{vile}) > \frac{1}{2}$)

$P(\text{obs} | H_0) > \alpha \Rightarrow \text{Accepte } H_0 \Rightarrow \text{Acquitté}!$

$P < \alpha$ Condamnation (Rejete H_0)

$P > \alpha$ Acquittement (Accepte H_0)

	Innocent (H_0)	Coupable (H_1 , vrai) α Réalité
Erreur de type II		Puissance
Vraisemblance		Erreur de type I

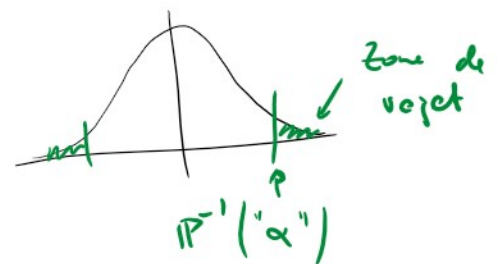
$P(8 \text{ r } 2f | H_0) \cong 4,4\%$

$\alpha = 1\%$ Accepte H_0 ($\alpha < 4,4\%$)
ACQUITTÉ

$\alpha = 5\%$ Rejete H_0 ($\alpha > 4,4\%$)
CONDAMNATION

En général $\alpha =$

- 1%
- 0,5%
- 0,1%
- 0,05%
- 0,01%



Si sur 30 lancers j'ai 24 piles

$$P(\underline{24} \text{ r } \underline{6} f) = \left(\frac{1}{2}\right)^{24} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \underline{30!}$$

$$P(\underline{24} \leq \underline{6}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{24} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \frac{30!}{24! \cdot (30-24)!}$$

$$= \frac{1}{2^{30}} \cdot \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}{24 \cdot 23 \cdot \dots} \approx 6,4 \cdot 10^{-25}$$

H_0 est rejetée d'ailleurs même si: $\alpha = 0,01\%$

